Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RJ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SIMETRIAS NO PLANO E SUAS APLICAÇÕES
Luiz Antônio Freire
Rua Marquês de São Vicente 225 . Gávea . Rio de Janeiro . CEP 22453 . Brasil . Tel.: 274-9922
Telex (021)31048

ÍNDICE

0. INTRODUÇÃO.

Escrevendo tais linhas, supuz que o leitor conheça a terminologia relativa à teoria dos conjuntos.

Imaginei também, terem todos uma certa noção de Geometria Plana Elementar.

1. TRANSFORMAÇÕES.

Uma transformação (ou função) é um mecanismo que pode ser visto através de três compartimentos (distintos porém bastante interligados):

i) Um conjunto de partida.

ii) Um conjunto de chegada.

iii) Uma regra (ou lei) que associa a cada elemento do conjunto de partida, um único elemento do conjunto de chegada.

Podemos representar tal mecanismo da seguinte maneira:

$$\star : \alpha \longrightarrow \beta$$
$$\Gamma \longmapsto \Gamma'$$

Neste caso, α é o conjunto de partida, β é o conjunto de chegada, Γ é um elemento (pertencente a α) que é transformado (através da função $\star$) no elemento Γ' (pertencente a β).

Para exemplificar, considere como conjunto de partida, um grupo de pessoas conversando numa esquina. Considere como conjunto de chegada, este mesmo grupo de pessoas.

Imagine que apareça um mágico pelas redondezas e, com uma varinha na mão... (passou a manteiga no pão ? - não) ...transformou cada elemento do grupo em pessoas com o dobro de sua altura normal.

Vamos colocar símbolos nesta transformação: Seja $\alpha = \{ J , M , P \}$ o grupo de pessoas: (João,

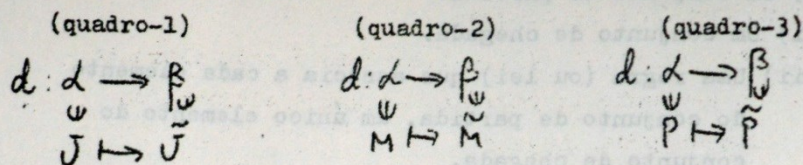
Maria e Pedro) .

Chamemos de João-til ($\tilde{J}$) , o João já transformado, ou seja, o João já duplicado em altura.

Idem para Maria-til ($\tilde{M}$) e Pedro-til ($\tilde{P}$).

Seja β o conjunto das pessoas já transformadas, ou seja: $\beta = \{\tilde{J}, \tilde{M}, \tilde{P}\}$

Represente por d a função em questão, ou seja , a função que duplica a altura de cada elemento do conjunto de partida. Então:

(quadro-1)	(quadro-2)	(quadro-3)
$d: \alpha \longrightarrow \beta$ $J \longmapsto \tilde{J}$	$d: \alpha \longrightarrow \beta$ $M \longmapsto \tilde{M}$	$d: \alpha \longrightarrow \beta$ $P \longmapsto \tilde{P}$

Vamos interpretar o quqdro-1:

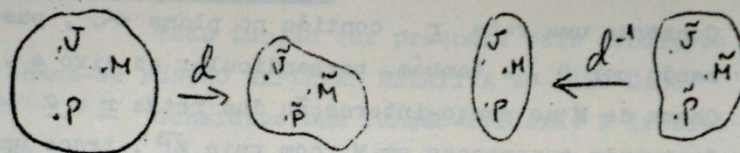
- (João) é transformado em (João-til) através da função d , ou:
- (João-til) é a imagem de (João) através da função d , ou ainda:
- (João) é a pré-imagem de (João-til) através da função d .

O que seria d^{-1} (a função inversa da função d) ?

d^{-1} traria (João-til) de volta para (João), ou seja, d^{-1} seria uma função onde:

i) Seu conjunto-de-partida seria o conjunto-de-chegada da função d .

ii) Seu conjunto-de-chegada seria o conjunto-de-partida da função $\underline{d}$.

iii) Sua regra (ou lei) deveria ter condições de trazer $\tilde{J}$ de volta para J , $\tilde{M}$ de volta para M , e $\tilde{P}$ de volta para P .

Observe que:

$\tilde{M}$ é a imagem de M, através da função $\underline{d}$.
M é a pré-imagem de $\tilde{M}$, através da função $\underline{d}$.

M é a imagem de $\tilde{M}$, através da função $\underline{d^{-1}}$.
$\tilde{M}$ é a pré-imagem de M , através da função $\underline{d^{-1}}$.

O mais importante neste exemplo, é que ele nos permite visualizar o conceito de função:

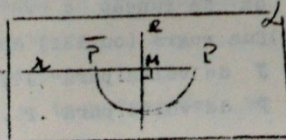
O grupo de pessoas conversando na esquina, foram transformados (através da função $\underline{d}$) em pessoas-gigante.

E conseguiram voltar ao normal, graças a ação de uma nova função: d^{-1} .

(Uma observação importante quanto à notação é que $\tilde{J}$, a imagem de J segundo $\underline{d}$, também é representada por J^{d}).

$\tilde{J} = J^{d}$ = imagem de J segundo $\underline{d}$.

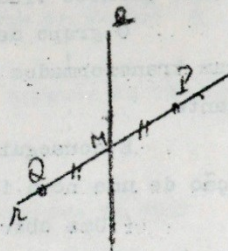
2. A FUNÇÃO REFLEXÃO.

Considere um plano α , contendo um eixo e e um ponto genérico P.

Construa uma reta r , contida no plano α , passando por P , e também, perpendicular ao eixo e . Chame de M ao ponto-interseção das retas r e e . Centrando o compasso em M, com raio $\overline{MP}$, trace um semi-círculo até atingir a reta r num ponto $\bar{P}$.

Dizemos que $\bar{P}$ é o simétrico de P em relação ao eixo e .

Observações:

1. Se $\bar{P}$ for simétrico de P (relativamente ao eixo e), então P será o simétrico de $\bar{P}$ (relativamente ao eixo e). Ou seja: $\bar{(\bar{P})} = P$

2. No diagrama ao lado, P e Q não são simétricos em relação ao eixo e, pois as retas r e e não são perpendiculares.

3. No entanto, P e Q apresentam uma simetria pontual (relativa ao ponto M) embora não apresentem uma simetria axial (relativa ao eixo e).

--------"--------

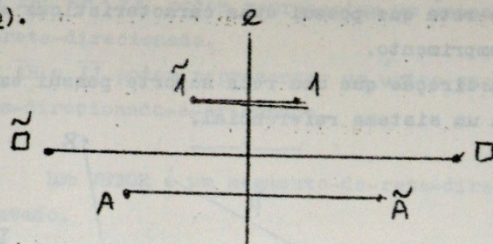
Considere agora uma certa função R definida conforme os ítens:

i) Conjunto de partida: Conjunto dos pontos de um plano α .

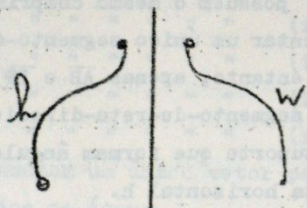
ii) Conjunto de chegada: conjunto dos pontos deste mesmo plano α .

iii) Regra : Associará a cada ponto P (de α) um único elemento P´(também de α) , de modo que P´ seja o simétrico de P (relativamente a um certo eixo dado).

Toda função que preenche tais condições chama-se FUNÇÃO REFLEXÃO RELATIVA AO EIXO DADO.

Considere uma função-reflexão R (relativa a e).

A imagem de 1 (através de R) é 1̃ .

A imagem de □̃ (através de R) é □ .

A imagem de Ã (através de R) é A .

A imagem da curva w (através de R) é a curva h.

A imagem da curva h (através de R) é a curva w.

NOTAÇÃO: Nos exemplos acima, $\tilde{1} = 1^R$ $\quad h = w^R$

$A = (\tilde{A})^R \quad \square = (\tilde{\square})^R \quad w = h^R$

3. A FUNÇÃO TRANSLAÇÃO.

Uma RETA é um conceito primitivo.

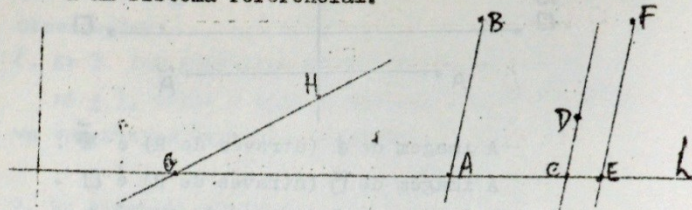
Um SEGMENTO-DE-RETA é um subconjunto da reta, limitado e conexo. (Tal definição é tratada com precisão e elegância nos estudos da Análise e Topologia).

Todo segmento-de-reta possui uma característica fundamental:

i) comprimento.

Um SEGMENTO-DE-RETA-DIRECIONADO é um segmento-de-reta que possui duas características essenciais:

i) comprimento.

ii) a direção que uma reta suporte possui em relação a um sistema referencial.

$\overline{GH}$, $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ possuem o mesmo comprimento. Portanto, podem representar um único segmento-de-reta.

No entanto, apenas $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ podem representar um único segmento-de-reta-direcionado pois estão sobre retas-suporte que formam ângulos idênticos em relação à reta horizontal h.

Um SEGMENTO-DE-RETA-DIRECIONADO-E-ORIENTADO é um segmento-de-reta-direcionado que possui três características:

i) comprimento.

ii) a direção que sua reta possui em relação a um sistema referencial.

iii) a orientação que ele assume.

$\overline{GH}$, $\overline{AB}$, $\overline{EF}$,$\overline{IJ}$ podem representar um único segmento-de-reta.

Apenas $\overline{AB}$, $\overline{EF}$, $\overline{IJ}$, podem representar um único segmento-de-reta-direcionado.

Apenas $\overline{AB}$ e $\overline{IJ}$ podem representar um único segmento-de-reta-direcionado-e-orientado.

----"----

Um VETOR é um segmento-de-reta-direcionado-e-orientado.

Observe que no diagrama acima,

$\overrightarrow{GH}$ e $\overrightarrow{CD}$ não representam um único vetor pois diferem nos ítens i,ii,iii.

$\overrightarrow{GH}$ e $\overrightarrow{AB}$ " " " " " " " " " ii),iii).

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ " " " " " " " " " (i).

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{FE}$ " " " " " " " " " (iii).

$\overrightarrow{FE}$ e $\overrightarrow{IJ}$ " " " " " " " " " (iii).

$\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{FE}$ " " " " " " " " " (i) e (iii).

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$ representam um único vetor pois coincidem em todos os ítens.

----"----

A FUNÇÃO TRANSLAÇÃO (segundo um vetor $\vec{v}$ dado) é uma função T satisfazendo:

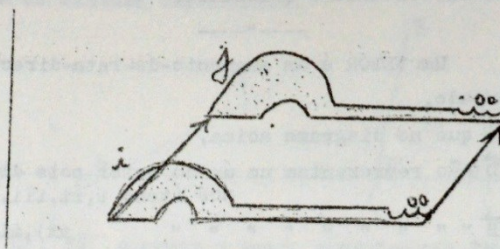
i) Conjunto de partida: o plano α .

ii) Conjunto de chegada: o plano α .

iii) Regra: Associará a cada ponto P (de α) um único elemento P' (também de α), de modo que $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.

A imagem de 1 (através de T) é 1'.

A imagem de ☐ (através de T) é ☐'.

A imagem de ★ (através de T) é 5 .

A imagem da figura i (através de T) é a figura j .

OBSERVAÇÃO: Nos exemplos acima,

$$P' = P^T \qquad j = i^T$$

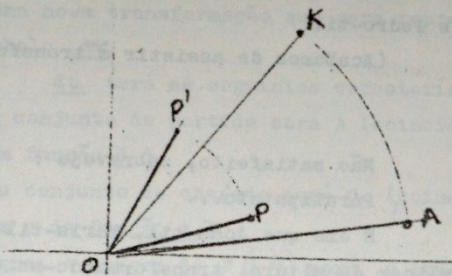
$$5 = ★^T$$

4. A FUNÇÃO-ROTAÇÃO :

A " FUNÇÃO-ROTAÇÃO " (relativa a um ângulo-orientado θ em torno de um ponto O fixo) é uma função Rot_θ satisfazendo:

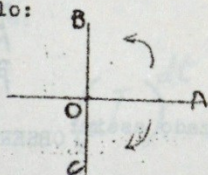
i) Conjunto de partida: o plano α .

ii) Conjunto de chegada: o plano α .

iii) Regra: Associará a cada ponto P (de α) um único elemento P' (também de α), de modo que o ângulo $P\hat{O}P' = \theta$ e $\overline{OP} = \overline{OP'}$.

A imagem de P (através de Rot_θ) é P'.

A imagem de A (através de Rot_θ) é K .

Observação um : Um ângulo-orientado é o resultado de um deslocamento . Tal orientação pode ser no sentido dos ponteiros de um relógio ou não.

Exemplo:

$A\hat{O}B = +90°$

$A\hat{O}C = -90°$

Observação dois : No exemplo acima,

$K = A^{Rot_\theta}$

5. COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES
ou COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES:

1º ATO: João, Maria e Pedro estão encostados sobre um carro conversando ...

E eis que de repente chega o mágico (o dono do carro) e enfurecido diz :

Caraguatatuba...

E eis que João, Maria e Pedro duplicam de altura, transformando-se em João-til, Maria-til e Pedro-til.

(Acabamos de assistir à transformação d).

2º ATO: Não satisfeito, esbraveja :

Paratipatató...

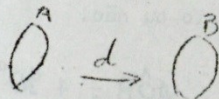
E eis que João-til, Maria-til e Pedro-til triplicam de altura, transformando-se em João-dois-til, Maria-dois-til e Pedro-dois-til.

(Acabamos de assistir à transformação t).

Sejam $A = \{ J , M , P \}$

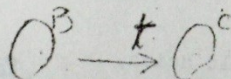
$B = \{ \tilde{J} , \tilde{M} , \tilde{P} \}$

$C = \{ \tilde{\tilde{J}} , \tilde{\tilde{M}} , \tilde{\tilde{P}} \}$

O 1ºATO poderia ser visualizado assim:

OBSERVAÇÃO:

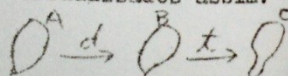
$\tilde{J} = J^d$
$\tilde{M} = M^d$
$\tilde{P} = P^d$

O 2ºATO poderia ser visualizado assim:

$B \xrightarrow{t} C$

OBSERVAÇÃO:

$\tilde{\tilde{J}} = (\tilde{J})^t$
$\tilde{\tilde{M}} = (\tilde{M})^t$

Os dois ATOS juntos poderiam ser visualizados assim:

$A \xrightarrow{d} B \xrightarrow{t} C$

João ($\in A$) foi transformado (através de d) em João-til ($\in B$) . (OBS: João-til tem o dobro da altura de João).

João-til ($\in B$) foi transformado (através de t) em João-dois-til ($\in C$). (OBS: João-dois-til tem o triplo da altura de João-til).

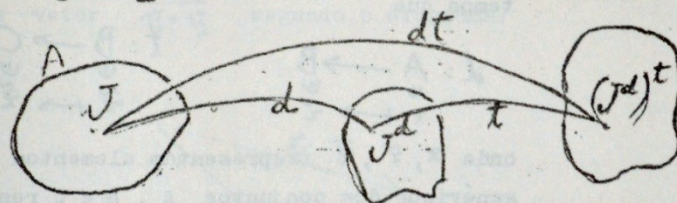
Comparando as duas observações, concluimos que João-dois-til tem o sêxtuplo da altura de João.

A composição das transformações d e t, será uma nova transformação que será representada pelo símbolo dt .

dt terá as seguintes características:

i) seu conjunto de partida será A (coincidindo com o da função d).

ii) seu conjunto de chegada será C (coincidindo com o da função t) .

iii) Regra: A imagem de J ($\in A$) será a imagem de J^d segundo t .

Ou seja:

$$(J)^{dt} = (J^d)^t$$

ALGUMAS PALAVRAS A RESPEITO DAS DIVERSAS NOTAÇÕES UTILIZADAS NESTE TEMA:

Encontramos na literatura em questão, muitos autores que adotam a expressão FG denotando uma composição de transformações.

Segundo tais autores, a função F agiu ANTES da função G .

No entanto, não é difícil folhear um livro (principalmente de análise), cujo autor tenha adotado para a composição FG uma conotação totalmente contrária àquela mencionada anteriormente: Neste caso, a transformação F agiu DEPOIS da transformação G .

Adotaremos nestas páginas a notação FG para representar uma composição onde a transformação F agiu antes da transformação G .

———"———

Voltando ao caso do mágico que atua sobre os conjuntos A , B e C ,

temos que

$$d: A \longrightarrow B \qquad t: B \longrightarrow C$$
$$x \longmapsto \tilde{x} \qquad \tilde{x} \longmapsto \tilde{\tilde{x}}$$

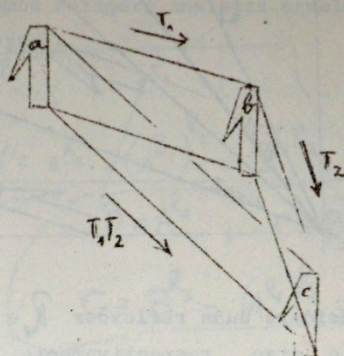
onde x, $\tilde{x}$, $\tilde{\tilde{x}}$ representam elementos genéricos dos conjuntos A , B e C respectivamente. (Lembre que $A = \{J , M , P\}$ $B = \{\tilde{J} , \tilde{M} , \tilde{P}\}$ e $C = \{\tilde{\tilde{J}} , \tilde{\tilde{M}} , \tilde{\tilde{P}}\}$).

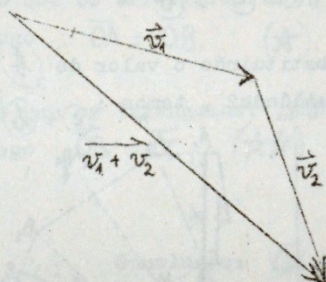
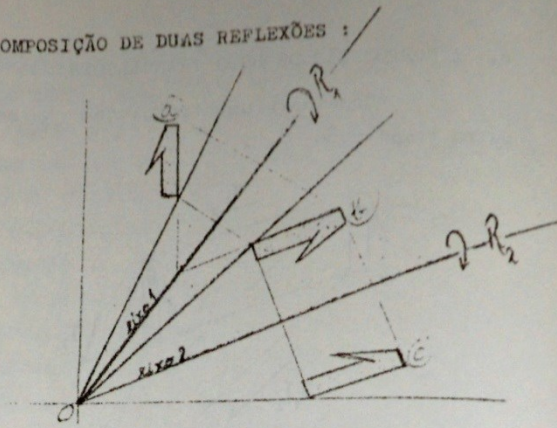
Quem seria a função (composta) dt ?

$$dt: A \longrightarrow C$$
$$x \longmapsto \tilde{\tilde{x}}$$

Ou seja: dt transformaria cada elemento do conjunto A num elemento do conjunto C que teria o sêxtuplo de sua altura inicial .

6. A COMPOSIÇÃO DE DUAS TRANSLAÇÕES .

Considere uma translação T_1 seguida de outra translação T_2 .

A composição T_1T_2 será também uma translação.

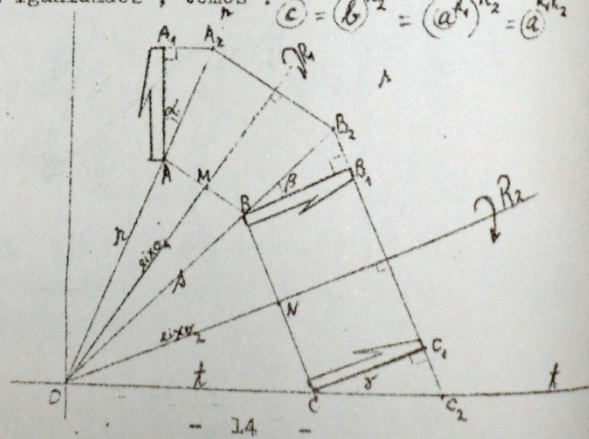
OBSERVAÇÃO: Dois vetores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ geram um terceiro vetor $\overrightarrow{v_1+v_2}$ segundo o diagrama:

7. A COMPOSIÇÃO DE DUAS REFLEXÕES :

Considere duas reflexões R_1 e R_2 em torno do $eixo_1$ e $eixo_2$ respectivamente.

b é a imagem de a segundo R_1.

$$b = a^{R_1} \qquad \text{(igualdade1)}$$

c é a imagem de b segundo R_2

$$c = b^{R_2} \qquad \text{(igualdade2)}$$

Substituindo o valor de b (na igualdade1) dentro da igualdade2 , temos : $c = b^{R_2} = (a^{R_1})^{R_2} = a^{R_1 R_2}$

Considere as retas ,

r (determinada pelos pontos O e A).

s (" " O e B).

t (" " O e C).

Novamente obtemos relações análogas àquelas já descritas , ou seja:

$$s = r^{R_1} \; ; \; t = s^{R_2}$$

$$t = s^{R_2} = (r^{R_1})^{R_2} = r^{R_1 R_2}$$

$$B = A^{R_1} \; ; \; C = B^{R_2}$$

$$C = B^{R_2} = (A^{R_1})^{R_2} = A^{R_1 R_2}$$

Além disso, observe que ΔAA_1A_2 , ΔBB_1B_2 e ΔCC_1C_2 são todos congruentes pois a reflexão é um movimento rígido e o ΔBB_1B_2 é a imagem (segundo R_1) do ΔAA_1A_2 .
Como estes triângulos são congruentes,

$$\alpha = \beta = \gamma .$$

----- " -----

Observe que os triângulos: ΔOAM e ΔOBM são congruentes. Logo $\overline{OA} = \overline{OB}$ (*)

----- " -----

Observe que os triângulos: ΔOBN e ΔOCN são congruentes. Logo $\overline{OB} = \overline{OC}$ (**)

-----" -----

(*) : $\overline{OA} = \overline{OB}$

(**): $\overline{OB} = \overline{OC}$

Conclusão: $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

Logo os pontos A, B e C pertencem a um arco de um círculo centrado em O , de raio $\overline{OA}$.
Isto significa que o ponto C é a imagem de A segundo uma rotação do ângulo $A\hat{O}C$ (no sentido de A até C).

Acontece que já havíamos observado que $\alpha = \beta = \gamma$
Logo toda a figura (c) será imagem da figura (a)
através de uma rotação do ângulo AÔC .
Em outras palavras ,

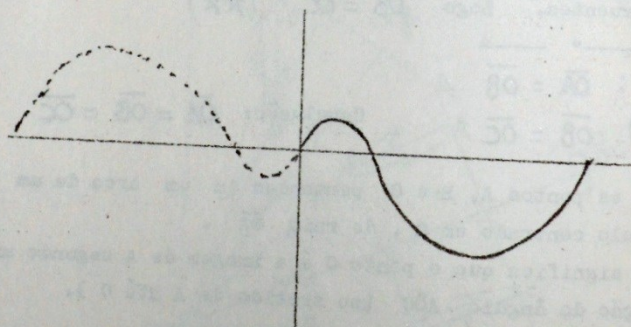
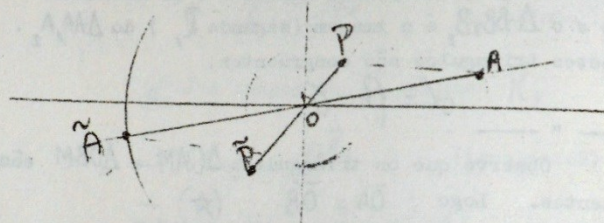
$$R_1 R_2 = Rot_{A\hat{O}C}$$

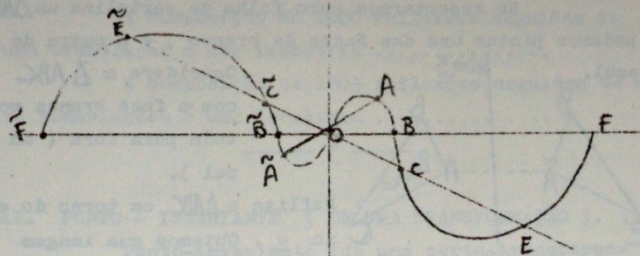
" A composição de duas reflexões em torno de dois eixos não-paralelos é uma rotação em torno do ponto-interseção dos dois eixos . "

Como AÔM = MÔB e BÔN = NÔC , concluimos que o ângulo de rotação (AÔC) será o dôbro do ângulo formado pelos dois eixos de reflexão.

----- " -----

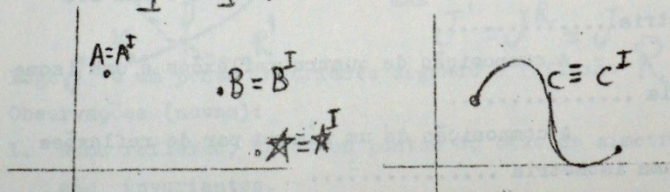
8. UM CASO PARTICULAR DA FUNÇÃO-ROTAÇÃO :

Considere uma rotação de $180°$ (em torno de O).

Esta transformação é também chamada de " meia - volta " .

Ela é equivalente a uma simetria-pontual em torno do ponto O .

9. A FUNÇÃO-IDENTIDADE :

João , Maria e Pedro conversam na esquina.
O mágico vem passando discretamente e ...
Kalauê ... exclama apontando a varinha.
... Mas nada aconteceu !?
A mágica falhou.
Todos permaneceram como estavam.
"... É a função-identidade.
"

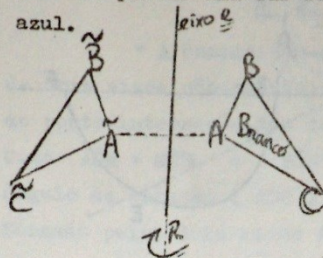
Seja I uma função-identidade.
Seja P um ponto qualquer do conjunto de partida.
Então $P^I = P$.

$A = A^I$ $\quad B = B^I$ $\quad ☆ = ☆^I$ $\quad C \equiv C^I$

OBSERVAÇÃO: Daqui para frente toda transformação representada por I , será a identidade.

10. ISOMETRIAS DIRETAS , ISOMETRIAS OPOSTAS .

Translações, Rotações e Reflexões são exemplos de movimentos rígidos.

Tais movimentos chamam-se isometrias.

Se recortarmos numa folha de cartolina um ΔABC podemos pintar uma das faces de branco , e a outra de azul.

Considere o ΔABC com a face branca voltada para fora (do papel).

Reflita o ΔABC em torno do eixo e . Obtemos sua imagem $\Delta \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ (através da reflexão R) onde o branco estará voltado para dentro e o azul na direção de nossos olhos.

Tal movimento (no caso , reflexão) é uma isometria oposta, (pois inverte a face da figura).

Translação é uma isometria direta.

Rotação é uma isometria direta.

Reflexão é uma isometria oposta.

A composição de duas reflexões é uma isometria ....

Uma reflexão seguida de uma translação é uma isometria ....

A composição de uma rotação seguida de uma translação é uma isometria ....

A composição de três reflexões é uma isometria..............

A composição de quatro reflexões é uma isometria ....

A composição de um número par de reflexões é uma isometria ....

A composição de um número ímpar de reflexões é uma isometria ....

A composição de duas translações é uma isometria ....

A composição de sete translações é uma isometria ....

A composição de 1000 reflexões seguidas de uma translação é uma isometria ....

A composição de 1003 reflexões seguidas de sete translações é uma isomètria ....

------ " -----

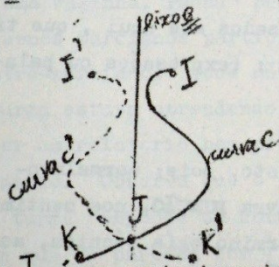
11. PONTO - INVARIANTE (DE UMA TRANSFORMAÇÃO).

Ponto-invariante (de uma certa transformação T) é aquele que não se altera sob o efeito de tal transformação .

P será invariante se:

$$P^T = P$$

Ou seja : se a imagem de P (segundo T) coincidir com o próprio P .

Exemplo: Considere R (reflexão em torno de $\underline{e}$) aplicada à curva $\underline{C}$.

Observe que:

$$I' = I^R \neq I$$
$$K' = K^R \neq K$$

mas

$$J' = J^R = J$$

Logo J é um ponto invariante segundo a reflexão R.

Observações (novas):

1. Numa reflexão, todos os pontos do eixo de simetria são invariantes.

2. Numa rotação θ em torno de O , o único ponto invariante é o centro O (exceto quando θ for um múltiplo de 360^{o}).

3. Toda translação (diferente da identidade), não admite ponto-invariante.

Observações já vistas:

4. A composição de duas reflexões (segundo eixos não-paralelos) é uma rotação.

5. A composição de duas translações é uma translação.

Observações novas, mas fáceis de visualizar:

6. A composição de duas rotações é uma rotação.

7. Seja R uma reflexão em torno de um eixo de um eixo e :

$$RR = I$$

8. Seja $Rot_{180^{o}}$ uma meia-volta :

$$Rot_{180^{o}} \cdot Rot_{180^{o}} = I$$

9. Na transformação identidade (I) , todo ponto é invariante.

----- " -----

12. ALGUNS COMENTÁRIOS.

Antes de prosseguirmos , seria interessante colocar um resumo dos termos usados até aqui , que traduzem exatamente a mesma idéia : (expressões ou palavras sinônimas).

FUNÇÃO = TRANSFORMAÇÃO

Insisto em repetir isto, pois: normalmente quando estamos lendo a palavra **FUNÇÃO**, nos sentimos meio perdidos dentro de uma terminologia técnica, ao passo que o termo TRANSFORMAÇÃO nos dá uma idéia melhor do que está se passando. Daí a minha insistência.

Isto justifica também o uso alternado destas duas palavras durante o texto.

-----"-----

Gostaria também de chamar a atenção para outros detalhes fundamentais:

1. Não há sentido citar apenas uma "função-rotação" sem que se especifique os seguintes dados complementares :

   i. em torno de que ponto ?

   ii. girando sob que ângulo ?

2. Não há sentido citar apenas uma "função-reflexão" sem especificar : — em torno de que eixo ?

3. Não há sentido citar apenas uma "função-translação" sem que se especifique :

— segundo que vetor ?

------"------

13. OPERAÇÕES BINÁRIAS.

Para falar sobre este tema, nada melhor do que citar a primeira página de um livro de álgebra abstrata escrito por John B. Fraleigh (vide referências no final) .

" Suponha que você esteja visitando uma estranha civilização num planeta muito distante. Digamos... — Marte. Vai caminhando,caminhando e de repente avista uma casinha. Passa pela janela e vê uma turma de pequenos marcianos participando de uma aula com um mestre-marciano. Você não tinha sido avisado de que a turma estava aprendendo a somar. Mas gostaria de fazer um relatório bem preciso sobre o que estava se passando. Observa que o professor diz algumas coisas e a turma responde em côro. O professor emite alguns sons que se parecem com (glup) , (poit) ...
e a turma prontamente responde com (bint).
Em seguida , o professor diz :
(ompt) , (gaft) ... e a turma responde: (poit) .
O que estariam eles fazendo ? Você não poderia afirmar que estavam somando números, pois nem sabia que tais sons representavam números. Obviamente você

percebe que houve uma comunicação entre professor-e-turma. Tudo que você poderia dizer com certeza é que tais criaturas conhecem uma regra, de modo que: quando certos pares de objetos são mencionados (um após outros) , como (glup) , (poit) , eles são capazes de responder (bint) . Este mesmo mecanismo acontece em nossas aulas de tabuada no primáio, quando o professor diz: (quatro) , (sete) , respondemos : (onze) ."

Nesta tentativa de analisar adição e multiplicação de números, somos levados à crer na idéia de que adição é basicamente uma regra que as pessoas aprendem, permitindo associar a cada dois números numa certa ordem, algum número como resposta.
Multiplicação também é uma regra, porém diferente.
Observe finalmente que: ao aplicar tal jogo com sua turma, o professor deve tomar certos cuidados quanto aos pares de objetos que vai lançar. Se, por exemplo ele lança (dez) , (céu) , seus alunos ficarão um tanto confusos. — A regra só se aplica a pares de objetos pertencentes a um determinado conjunto."

------"------

O conceito de função (visto anteriormente), associa um elemento (do conjunto de partida) à sua imagem.

O conceito de operação-binária, associa um par ordenado (de elementos do conjunto de partida) a um certo elemento que será a imagem do par-ordenado através da operação-binária.

Primeiro exemplo:

Sejam M = conjunto das Mulheres
H = conjunto dos Homens
B = conjunto dos Bebês

Considere o conjunto dos pares (m, h) onde
$m \in M$ e $h \in H$

Representaremos tal conjunto por $M \times H$.

Assim,

(Ana , Pedro) $\in M \times H$
(Paola , Kauê) $\in M \times H$ etc.

Defina a OPERAÇÃO-BINÁRIA $F: M \times H \longrightarrow B$
$(x, y) \longmapsto z$

que associará a cada par ordenado (x,y) , pertencente a $M \times H$, um elemento z , pertencente a B.

Neste caso, $F: M \times H \longrightarrow B$
(Ana,Pedro) $\longmapsto$ Adriana
(Paola,Kauê) $\longmapsto$ Felipe

Adriana é a imagem (segundo a operação-binária F) do par (Ana,Pedro).
Felipe é a imagem (segundo F) do par (Paola,Kauê).
Veja agora as diversas notações que poderão ser utilizadas:

Ana F Pedro = Adriana

ou

$(\text{Ana},\text{Pedro})^{F}$ = Adriana

OBSERVAÇÃO: Neste caso, não vale ter gêmeos, pois operações-binárias não podem admitir mais de uma imagem associada a um certo par.
(Vide a palavra "único" no ítem (iii) do conceito de transformação no início do texto).

------"------

Segundo exemplo:

Seja Z o conjunto dos números inteiros.

Defina a operação-binária $\star : Z \times Z \longrightarrow Z$

$(x, y) \longmapsto z$

que associará a cada par ordenado (x,y) uma imagem z, de modo que $z = x + y$.

Neste caso, $\star : Z \times Z \longrightarrow Z$

$(5,8) \longmapsto 13$

$(4,3) \longmapsto 7$ etc

Notação: $\begin{cases} (5,8)^{\star} = 13 \\ (4,3)^{\star} = 7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 5 \star 8 = 13 \\ 4 \star 3 = 7 \end{cases}$

O par $(5,8)$ é a pré-imagem de 13 (sob a operação $\star$).

7 é a imagem de $(4,3)$ (sob a operação $\star$).

------"------

14. A COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES VISTA COMO UMA OPERAÇÃO-BINÁRIA .

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das isometrias.

(Recordando: Isometria-é um movimento rígido, ou seja: uma função do plano em si mesmo que é capaz de deslocar uma determinada figura, sem deformá-la. Daí o nome: movimento rígido).

Observe que toda isometria pode ser decomposta numa sequência de reflexões e translações .
(Não citei rotações pois já vimos que a rotação nada mais é do que a composição de duas reflexões).

Voltemos então ao ponto inicial:

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das isometrias.

Por exemplo: Se R_1 é uma reflexão em torno de um eixo ℓ_1.

Se T é uma translação segundo um vetor $\vec{v}$.

Se R_2 é uma reflexão em torno de um eixo ℓ_2,

Então: $R_1 \in \mathcal{M}$ $\quad$ $T \in \mathcal{M}$

$R_1 R_1 \in \mathcal{M}$ $\quad$ $TR_1 \in \mathcal{M}$

$R_1 R_2 \in \mathcal{M}$

Seja F_i um elemento genérico de $\mathcal{M}$. (i=1,2,...)
Defina a operação-binária $\star : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$
$$(F_1, F_2) \mapsto F_3$$
associando o par-ordenado (F_1, F_2) à isometria F_3 de modo que: F_3 seja igual à composição $F_1 F_2$,
ou seja :
de modo que $F_3 = F_1 F_2$.

Em outras palavras : a operação $\star$, definida acima, levará cada par (F_1, F_2) em sua imagem $F_1 F_2$

Em símbolos :

$$(F_1, F_2)^{\star} = F_1 F_2$$

ou então :

$$F_1 \star F_2 = F_1 F_2$$

Observe que a operação $\star$, definida acima nada mais é do que aquela COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES vista anteriormente.

A novidade é que a transformação está sendo tratada agora, como um elemento do conjunto $\mathcal{M}$.

E a operação-composição está dentro do contexto de operação-binária, que leva um par de transformações (X,Y) à sua imagem XY (a composição de X, seguida de Y).

------"------

15. O VERBO COMUTAR .

Uma operação binária $\square : A \times B \longrightarrow C$
$$(x,y) \mapsto z$$
é comutativa se $(x,y)^{\square} = (y,x)^{\square}$

Exemplos:

1. Seja Z o conjunto dos inteiros e
$$\oplus : Z \times Z \longrightarrow Z$$
$$(x,y) \mapsto x+y$$

$\oplus$ é comutativa pois
$$(x,y)^{\oplus} = x+y = y+x = (y,x)^{\oplus}$$

2. $\div : (\mathbb{Z}-\{0\}) \times (\mathbb{Z}-\{0\}) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$(x,y) \longmapsto \frac{x}{y}$$

não é comutativa pois

$(x,y)^{\div} = \frac{x}{y}$ enquanto que $(y,x)^{\div} = \frac{y}{x}$

Logo não podemos afirmar que

$$(x,y)^{\div} = (y,x)^{\div}$$

3. Seja m uma função que calça uma certa meia em um determinado pé.

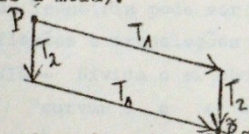
Seja s outra função que calça um certo sapato no pé citado anteriormente.

Seja $\star$, a operação composição entre as duas funções m e s.

Então

$$m \star s \neq s \star m$$

Logo $\star$, neste caso não é uma operação comutativa. (Calçar uma meia e depois um sapato é diferente do que calçar primeiro o sapato e depois a meia).

4. [Diagrama: paralelogramo com ponto P e vetores T_1, T_2]

Considere duas translações: T_1 e T_2 .

A translação T_1 seguida da translação T_2 produz o mesmo efeito que a translação T_2 seguida de T_1 .

Logo

$$T_1 T_2 = T_2 T_1$$

" Duas translações comutam " .

5. Será que duas reflexões comutam ?

P^{R_2}

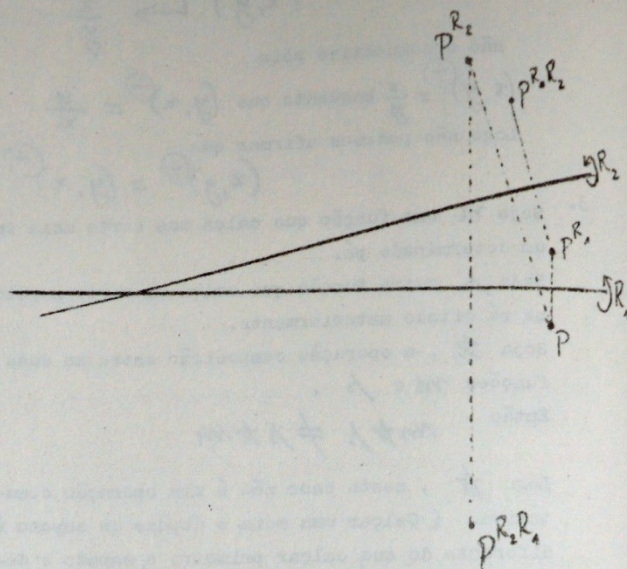
$P^{R_1R_2}$

R_2

P^{R_1}

R_1

P

$P^{R_2R_1}$

16. UMA NOVA PALAVRA .

Voltemos à nossa relação de expressões sinônimas :

- função = transformação .
- isometria = movimento rígido = transformação envolvendo composição de reflexões e translações.
- rotação de 180° (em torno de O) = meia-volta

Uma nova palavra:

- composição de transformações = <u>produto</u> de transformações.

Então:

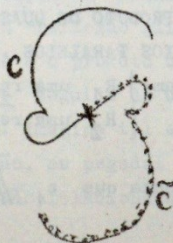
T_1T_2 poderia ser mencionada como um produto de duas translações.

RT poderia ser mencionada como um produto de uma reflexão seguida de uma translação.

------"------

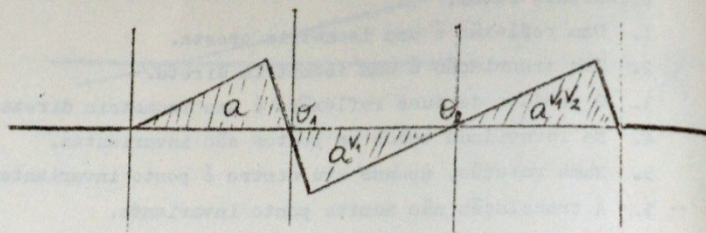
Chegou o momento de fazermos um resumo dos principais fatos:

1. Uma reflexão é uma isometria oposta.
2. Uma translação é uma isometria direta.
3. O produto de duas reflexões é uma isometria direta.
4. Na identidade todos os pontos são invariantes.
5. Numa rotação, apenas seu centro é ponto invariante.
7. A translação não admite ponto invariante.
8. Uma rotação pode ser expressa como um produto de duas reflexões .
9. A rotação de 180^o em torno de um ponto O coincide com uma simetria pontual relativa ao ponto O .
10. Toda isometria pode ser decomposta num produto de reflexões e translações .

EXERCÍCIO - Divida o símbolo do banco boavista em duas curvas : c e $\tilde{c}$. Que tipo de isometria leva c em $\tilde{c}$?

17. O PRODUTO DE DUAS MEIA-VOLTAS EM TORNO DE DOIS PONTOS DISTINTOS.

Lembrando que uma meia-volta em torno de um ponto O significa uma rotação de 180^{o} (em torno de O), considere a seguinte situação:

Sejam: $\begin{cases} V_1 & \text{uma meia-volta (em torno de } O_1 \text{).} \\ V_2 & \text{uma meia-volta (em torno de } O_2 \text{).} \end{cases}$

Vejamos o que acontece com o triângulo a após sofrer a atuação de V_1 seguida de V_2 :

Seja T a translação segundo o vetor $\overrightarrow{O_1 O_2}$.

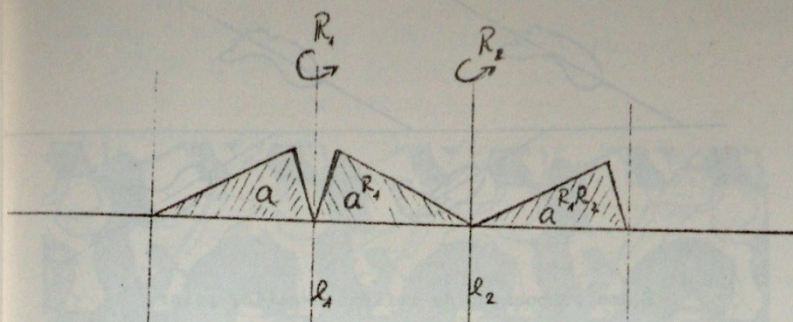
Então :

$$V_1 V_2 = TT$$

" O produto de duas meia-voltas em torno de dois pontos-distintos, (O_1) e (O_2) é uma translação segundo o vetor $2\,\overrightarrow{O_1 O_2}$.

18. O PRODUTO DE DUAS REFLEXÕES EM TORNO DE DOIS EIXOS PARALELOS .

Sejam: $\begin{cases} R_1 & \text{uma reflexão emtorno de } e_1 \text{ .} \\ R_2 & \text{uma reflexão em torno de } e_2 \text{ .} \end{cases}$

Suponha que $e_1 \parallel e_2$.

" R_1R_2 equivale a uma translação TT segundo um vetor $\vec{v}$, perpendicular aos eixos , cujo comprimento é o dobro da distância entre os eixos, orientado do primeiro para o segundo " .

(Isto é: $\vec{v}$ está representando o nosso antigo $2\,\overrightarrow{O_1O_2}$) .

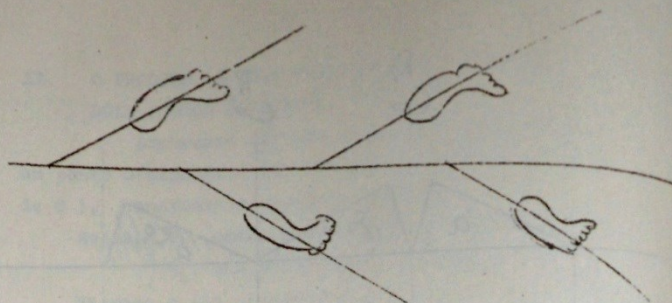
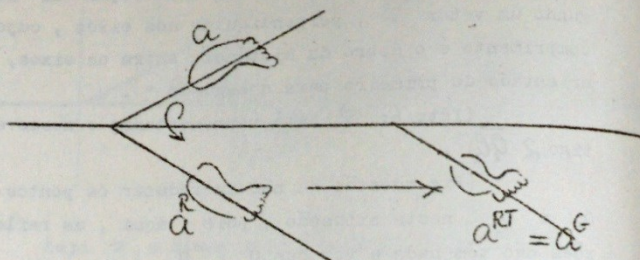
(Fiz questão de não introduzir os pontos O_1 e O_2 nesta situação , pois , aqui , as reflexões não têm nada a ver com O_1 e O_2) .

19. A REFLEXÃO GLIDE .

Quero agora apresentar-lhes INTRODUCTION TO GEOMETRY , escrito por H.S.M.COXETER :

Na página 43, vemos :

" Estamos agora familiarizados com três tipos de isometria : reflexão, rotação e translação.

Um outro tipo é a "reflexão glide " (pronuncia-se "glaide") , que é o produto de uma reflexão em torno de um eixo e seguida de uma translação ao longo do mesmo eixo. Imagine tal eixo sobre as areias de uma praia ; então, as pegadas consecutivas impressas na areia, estão relacionadas através de um movimento "glide" ".

É uma composição de reflexões-glide, pois:

Denotemos por :

R = reflexão em torno de e .

T = translação ao longo de e (segundo um vetor $\vec{v}$, paralelo a e).

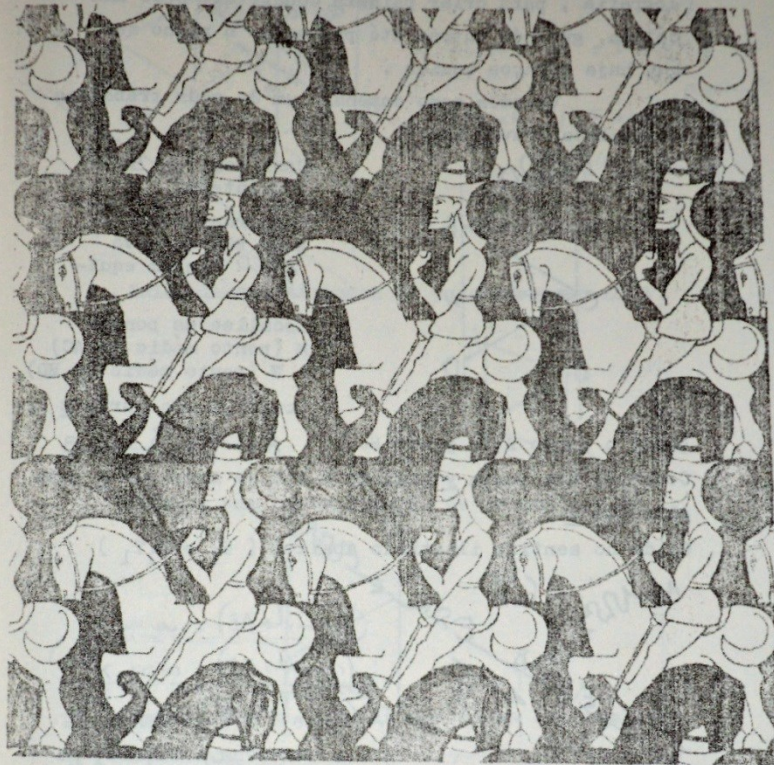
G = reflexão glide.

G foi definida como sendo igual ao produto RT . Logo duas pegadas consecutivas estão realmente relacionadas por uma reflexão GLIDE .

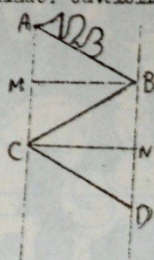
Podemos imaginar um passo de a até a^G como sendo subdividido em dois movimentos:

1º) uma reflexão R .

2º) uma translação T .

G = RT terá grandes aplicações na construção de certos painéis que veremos no parágrafo seguinte.

20. O USO DA REFLEXÃO GLIDE NO TRABALHO DE M.C.ESCHER.

Maurits Escher foi um artista holandes , nascido em 1898 , que utilizou técnicas de cristalografia , para criar painéis constituídos de uma célula, gerando outras até preencher o plano sem que haja espaços vazios .

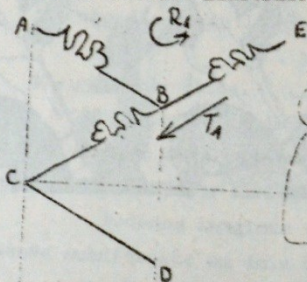
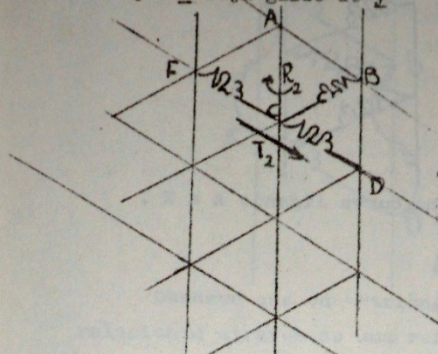
Vejamos como entender um de seus trabalhos entitulado: Cavaleiro.

Considere um ΔABC equilátero.

Construa (sobre o lado BC) um novo ΔBCD também equilátero.

Localize os pontos M (ponto médio de AC) e N (ponto médio de BD).

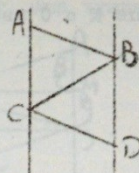
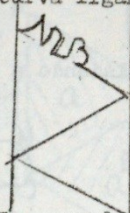
Construa uma curva x ligando o ponto A ao ponto B.

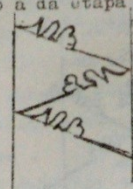
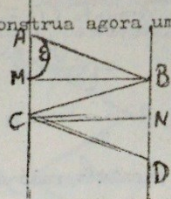
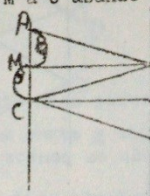
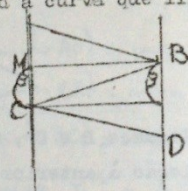
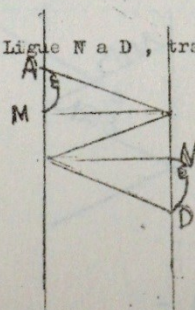
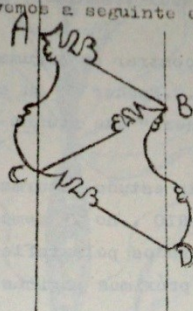
Construa uma curva y ligando B a C de modo que y seja glide de x .

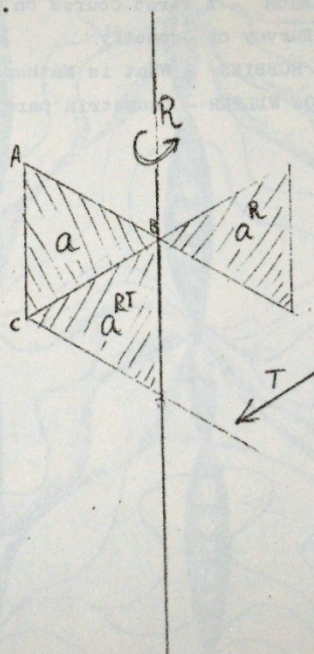
Glide no sentido ilustrado abaixo: ($G_1 = R_1T_1$)

Construa agora uma curva z ligando C a D de modo que z seja glide de y

caminho $\widehat{BC}$ = curva y

caminho FC = curva y^{R_2}

caminho CD = curva $y^{R_2 T_2}$ = curva y^{G} = curva z

Inicialmente tínhamos um paralelogramo ACDB .

Criamos uma curva ligando os pontos A e B .

Ligamos B e C , usando uma curva que é glide em relação à anterior .

Finalmente ligamos os pontos C e D usando uma curva glide em relação à da etapa anterior.

Construa agora uma curva ligando A a M .

Ligue M a C usando uma glide relativamente à anterior .

Ligue B a N , transladando a curva que liga M a C.

Ligue N a D , transladando a curva que liga A a M.

Obtivemos a seguinte estrutura :

Observe que os "triângulos" ABC e BCD se relacionam através de uma reflexão glide :

O "triângulo" ABC sofre inicialmente uma reflexão sobre o eixo $\overline{BD}$ e, a seguir, uma translação segundo a direção $\overrightarrow{BC}$.

Em alguns de seus trabalhos, Escher usou esta estrutura glide .

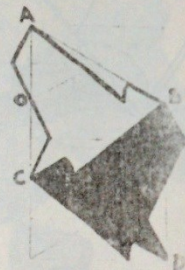
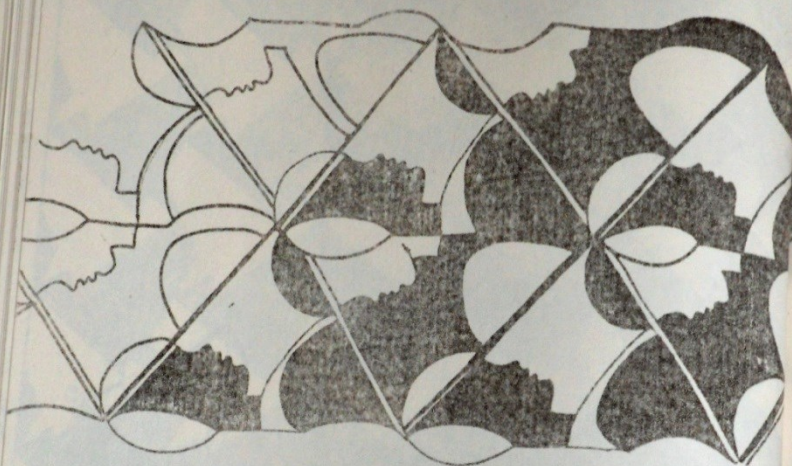
É possível encontrar em algumas livrarias, " The Graphic Work of M.C.Escher " ou então: " The Magic Mirror of M.C.Escher " que reúnem seus principais trabalhos.

Motivados neste estudo, aturma de "Matemática para Artes" da PUC-RIO , no 2º semestre de 83 , decidiu criar painéis gerados pela reflexão glide , que se encontram nestas próximas páginas .

REFERÊNCIAS:

COXETER - Introduction to Geometry.
JOHN FRALEIGH - A First Course on Abstract Algebra.
EVES - A Survey of Geometry
COURANT & ROBBINS - What is Mathematics?
CELSO BRAGA WILMER - Geometria para Desenho Industrial.

A
O
B
C
D
CÉLULA

.

Georgia Mª Santos
Projeto nº 2

Projeto nº 2
Georgia Mª Santos

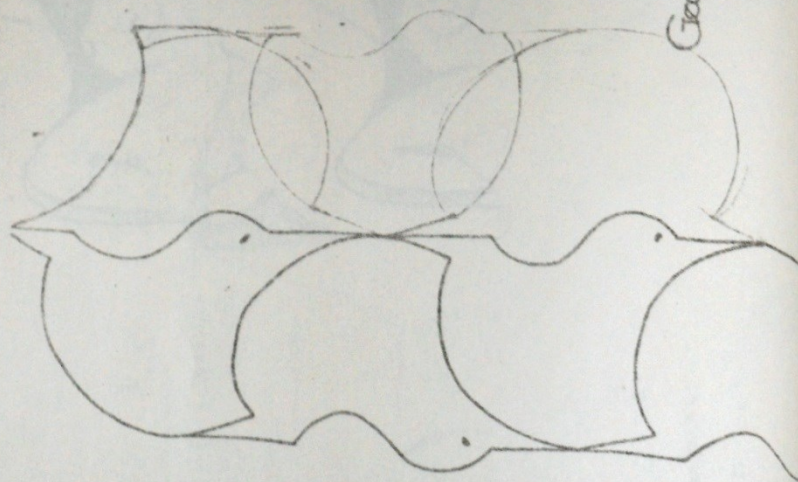
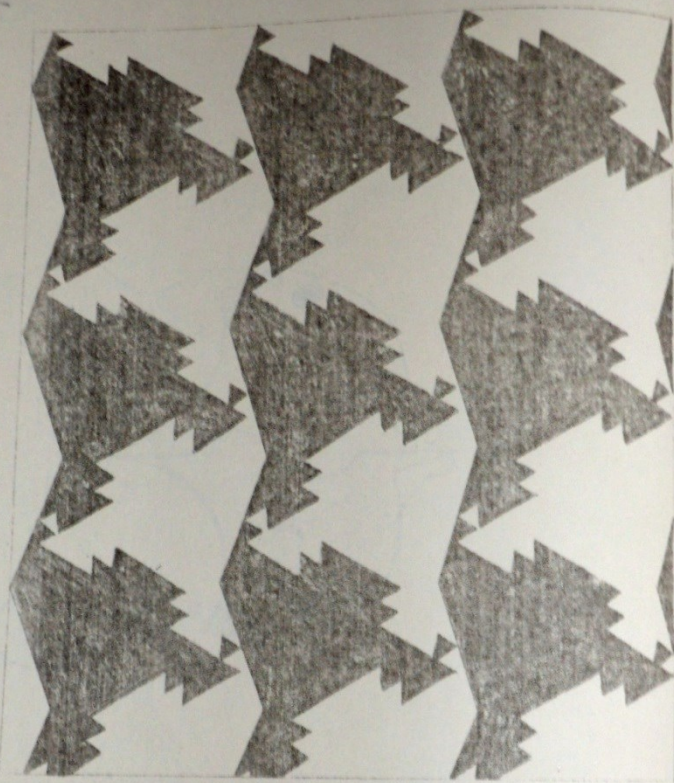
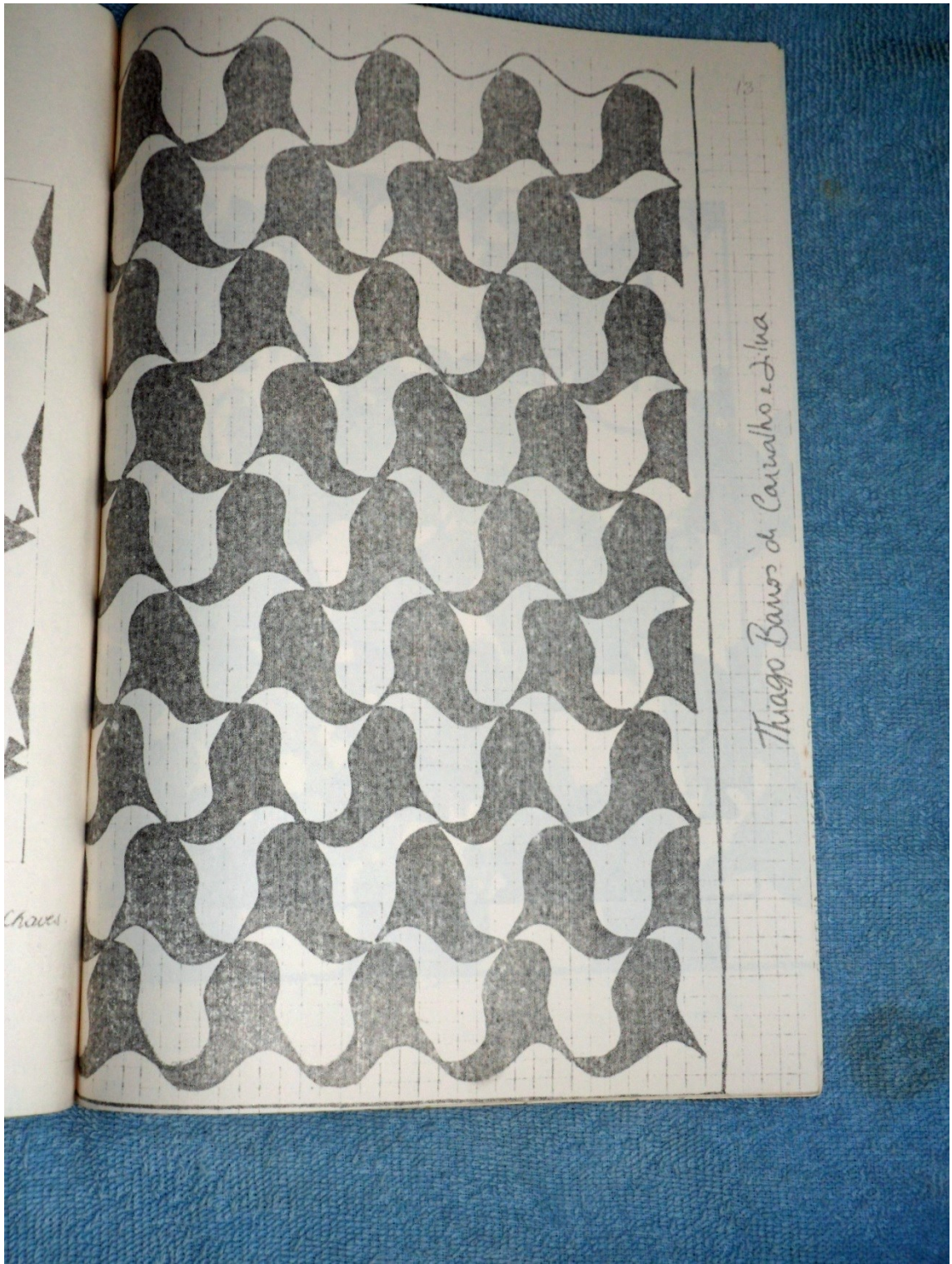
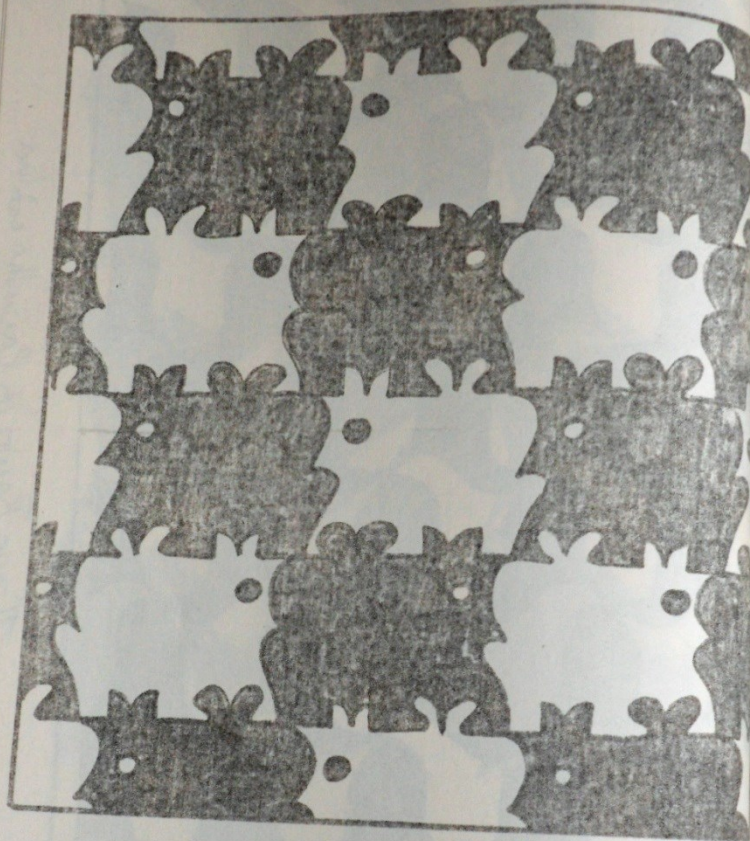
.

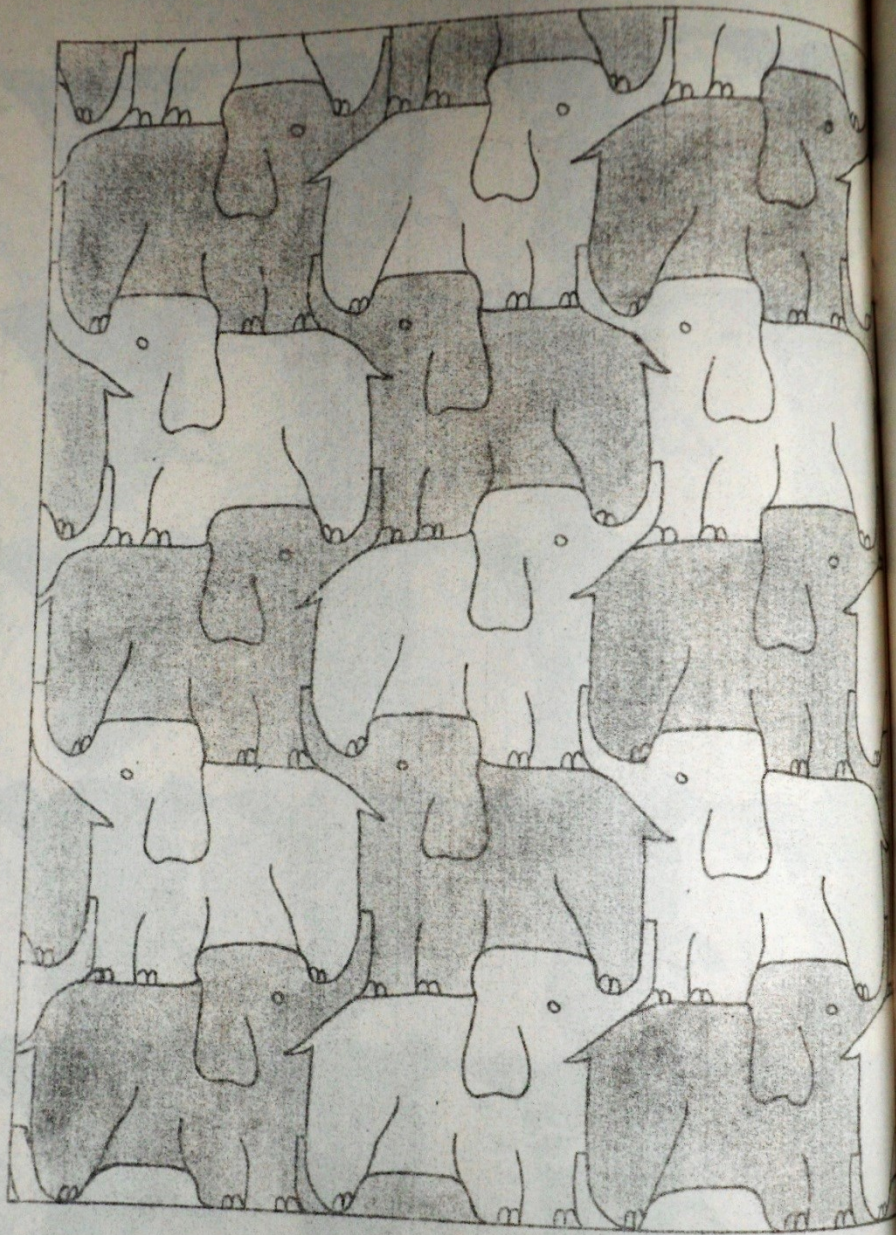
GILDA CARLA DE SAMPAIO
MATEMÁTICA
PUC. 83

Geórgia Mª
Santos

.

Maria de Lourdes S

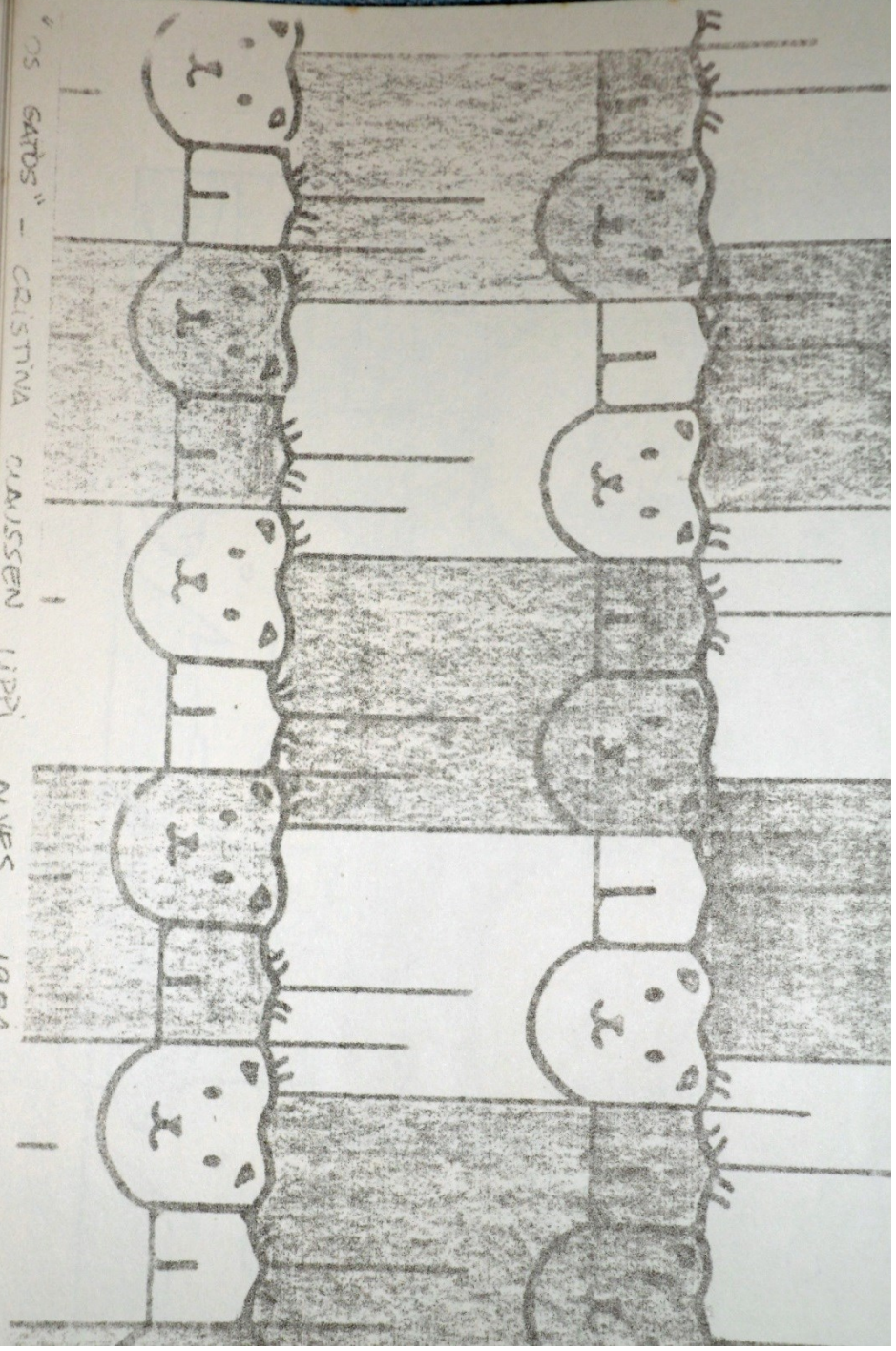
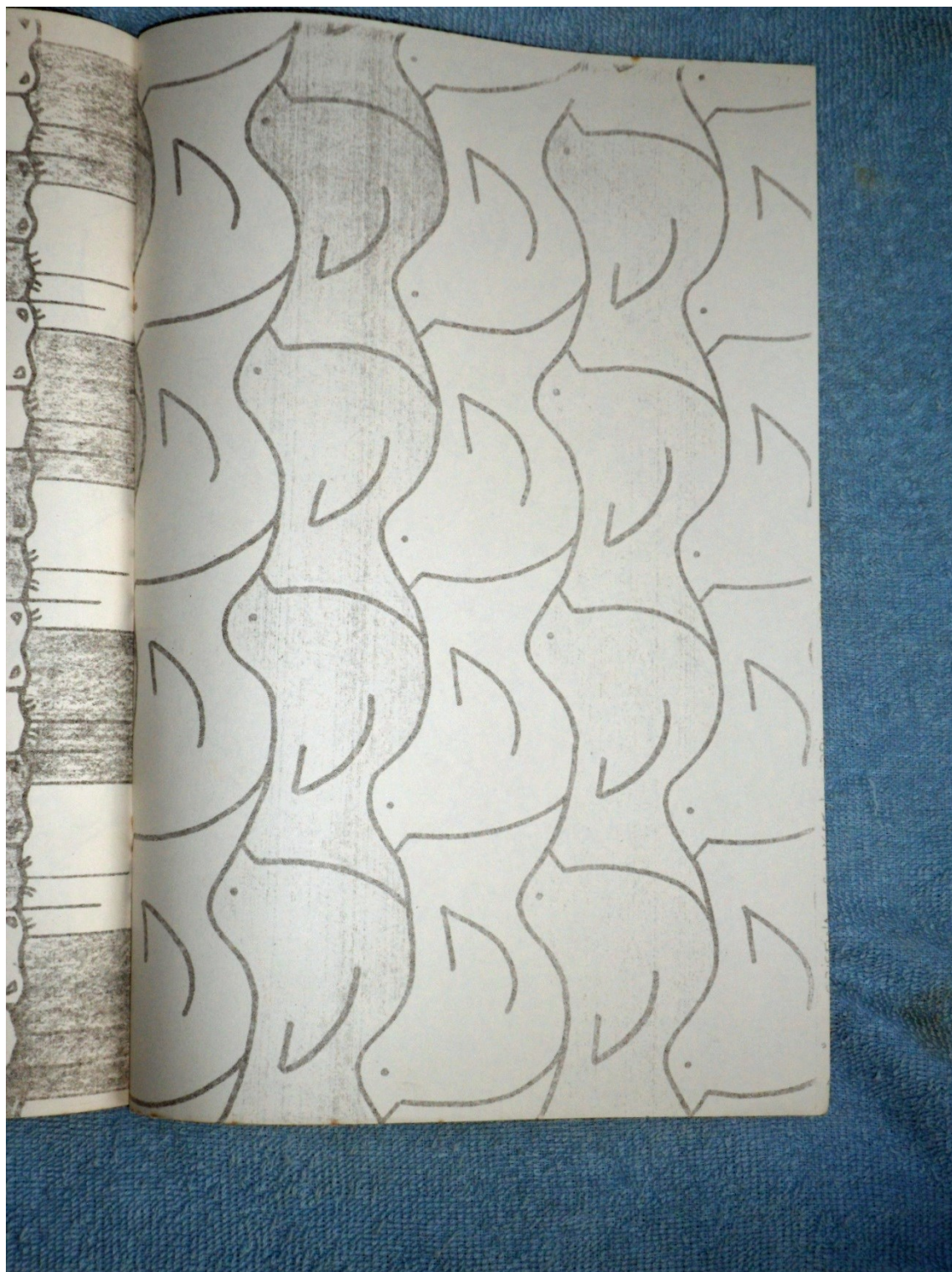
.

13
Thiago Barros de Carvalho e Silva
Chaves

.

.

Ana Cristina O. P. Pereira
1983

MONICA

.

"OS GATOS" - CRISTINA CLAUSSEN LIPPI ALVES - 1984

.

"A PILHA DE GATOS"
MARIA LUCIA MANHÃES

.

Claudia
Teixeira
84